

減衰モデルが弾塑性系の時刻歴応答解析に与える影響

Influence of Damping Model on the Time-History Response Analysis of Elastic-Plastic Systems

建築都市空間デザイン専攻 空間防災講座 建築構造工学研究室 福富 将

Abstract

In time history analysis of building structures, damping is commonly modeled by classical damping models such as stiffness proportional damping or Rayleigh damping. However, these common models can lead to unrealistically large damping forces as the system yields, and, in turn, lead to underestimation of the response deformation and acceleration. Literature survey and time-history analysis of basic models were conducted to examine how the choice of damping model affects the computed nonlinear behavior. Quantitative comparison was made to comment on the limitations of the Rayleigh damping model.

Keywords: Damping Model, Time-History Analysis, Rayleigh Damping, Classical Damping, Software

1. はじめに

建築・土木構造物の地震応答解析における減衰は、減衰比が周波数に依存しないこと¹⁾、極めて固有振動数が大きい高次モードは地震応答に関与しないこと²⁾を前提においている。研究でも実務でも、レイリー減衰に代表される比例減衰が一般的に採用される。レイリー減衰は、質量比例項と剛性比例項の線形結合として、式(1)で表される。

$$[c] = a_0[m] + a_1[k] \quad (1)$$

ここで、 $[c]$ は減衰行列、 $[m]$ は質量行列、 $[k]$ は剛性行列、 a_0 、 a_1 は係数である。レイリー減衰には、系の固有振動数に応じた減衰を設定でき、自由度の大きな系でも計算効率が良く^{1),2),3)}、弾性域では、広い振動数域で計算結果を実測値に一致させられる等の特徴がある⁴⁾。しかし、系が降伏し、剛性とともな固有振動数や固有モードが変動すれば、レイリー減衰は減衰力を大きく見積もりすぎる懸念が指摘されている^{5),6),7)}。そこで本研究は、振動解析で提案される種々の減衰モデルについて、構造物の弾塑性応答に対する適性を比較、検討した。

2. 種々の減衰モデルについて

表1に、数値積分法に基づく時刻歴応答解析を対象に提案されている、主要な減衰モデル^{1),5),6),7),8),16)}を整理する。ここで、 $\{\Phi_i\}$ は i 次の固有ベクトル、 ω_i は i 次の固有円振動数、 $M_i = \{\Phi_i\}^T [m] \{\Phi_i\}$ は i 次の広義質量、 $\bar{\zeta}_{k0}$ は選択した k 次モードに対する目標減衰比、 a_i は、 ω_k と $\bar{\zeta}_{k0}$ によって定まる係数である。上添字『*』は、弾塑性状態に応じてその $[k]$ 、 $\{\Phi_i\}$ 、 a_i または M_n を逐次更新することを意味する。固有ベクトルや係

数の更新は、解析ステップごとのモード解析を必要とするので、計算負荷が大きい。表1に示す比例・非比例の分類は、剛性の変化に追従して、常に比例減衰であるか否かを示す。保持とは、常に比例減衰のモデルのうち、予め選択したモード(k 次モード)の減衰比を目標値に保持できるものである。代表的な数値解析ソフトウェア⁹⁾⁻¹³⁾に組み込まれている減衰モデルを『○』で記す。

モデル1は質量比例減衰、モデル2は剛性比例減衰である。塑性状態でモデル2は非比例減衰となり、モデル1は比例減衰だが、減衰比を保持できない¹⁾。モデル3は、瞬間剛性をとるので、塑性状態でも常に比例減衰である¹⁾。モデル4は、係数 a_1 も更新することで減衰比を目標値に保持できる、モデル3の改良型である。モデル5は、いわゆるレイリー減衰¹⁾で、塑性状態で非比例減衰となる欠点がある⁵⁾。モデル6は、初期剛性でなく瞬間剛性をとり、常に比例減衰とする、レイリー減衰の改良型である^{5),6)}。モデル7は、剛性行列に加え、係数 a_0 と a_1 も逐次更新し、減衰比を保持する⁵⁾。モデル8は、瞬間剛性をとるが、係数を更新しないため、モデル7より計算負荷が小さい。弾性限を超えると非比例減衰となるが、質量比例項の寄与を抑え、振動数の小さな領域で減衰力が大きくなりすぎないように工夫したモデルである⁷⁾。モデル9は、カギー減衰の一般型で、項数 N を大きく取ること、高次モードまで減衰比を指定できる¹⁴⁾。モデル10は、カギー減衰から、剛性行列の寄与が小さい2項だけ取り出すもので、剛性行列も係数も更新しないが、減衰比を目標値の近くに保持できる利点がある⁵⁾。モデル11は、モデル10に1項足すことで、より高次のモードまで減衰比を目標値の近くに保持で

きる^{9),10),11)}。モデル 12 は、予め設定した特定のモードの組合せから減衰行列を決定するもので⁸⁾、レイリー減衰やカギー減衰と系統が異なる。モデル 13 は、モデル 12 の各項を逐次更新する改良型で、減衰比を保持できる。モデル 14 は、要素別に減衰比を指定する減衰モデルで、制振構造等で実用される^{9),10),11)}。

3. 等価減衰比の定義

Charney⁵⁾は、系の弾塑性状態に応じた減衰比を評価するために、式(2)の等価減衰比を提案した。

$$\zeta_{n,eq} = \frac{\{\Phi_i^*\}^T [c] \{\Phi_i^*\}}{2\omega_i^* \{\Phi_i^*\}^T [m] \{\Phi_i^*\}} \quad (2)$$

ここで、 ω_i^* と $\{\Phi_i^*\}$ は、逐次算定した、 i 次の固有振動数とモードベクトルである。系が弾性である限り、選択した k 次モードに対して、 $\zeta_{k,eq}$ は必ず目標減衰比に一致する。系が降伏して固有振動数や固有モードが変化した場合、例えば $[c]$ が比例減衰でなくとも、 $\zeta_{i,eq}$ は必ずスカラー量をとる。

同じ概念を拡張して、逐次の有効モード質量 m_i^* と、逐次の有効モード質量比 γ_i^* を、式(3)と(4)で計算できる。

$$m_i^* = \beta_i^{*2} \cdot \{\Phi_i^*\}^T [m] \{\Phi_i^*\} \quad (3)$$

$$\gamma_i^* = m_i^* / \sum_{i=1}^N m_i \quad (4)$$

ここで、 β_i^* は逐次の刺激係数である。

さらに、 γ_i^* を利用して、減衰比の代表値 ζ_{eq} を、式(5)によって逐次計算することができる。

$$\zeta_{eq} = \sum_{i=1}^N \zeta_{i,eq} \cdot \gamma_i^* \quad (5)$$

以下、 $\zeta_{n,eq}$ と ζ_{eq} を利用して、表 1 の減衰モデルを比較、検討する。

4. 解析方法

せん断型 5 自由度系の地震応答解析を実行した。階高を、1 層目が 5 m、2 層目から 5 層目が 4 m、各層の床面積を 6 m × 30 m、床重量を 8 kN/m² と想定した。弾塑性復元力特性に、図 1(a)と(b)に示す Bilinear 型と Menegotto-Pinto 型の 2 通りを用いた。Bilinear 型は、 A_i 分布にしたがって地震力を比例増加させた場合に、ベースシア係数 0.3 で全層がほぼ降伏するように耐力を定め¹⁵⁾、そのときの層間変形角がほぼ 0.0075 rad となるように各層の剛性を定めた。2 次勾配を初期勾配の 0.01 倍とした。図 1 に示す白丸は、ベースシア係数が 0.2 と 0.3 のときの、各層の層間変形角と耐力を示している。Menegotto-Pinto 型は、層間変形角 0.02 rad で、単調載荷のエネルギー吸収量が Bilinear 型と等しくなるように諸元を定めた。5 自由度系の 1、2、3 次固有周期は、1.14、0.44、0.28 s だった。入力地震動は、1995 年兵庫県南部地震の JMA 神戸記録の NS 成分とした。目標減衰比を 0.05 に設定し、モデル 1 から 4 では 1 次モード、モデル 5 か

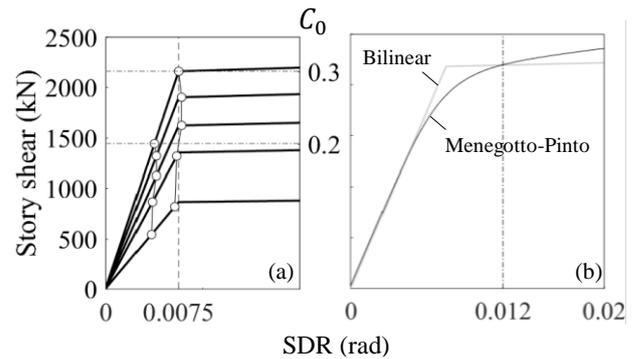


図 1 (a) 5 自由度系の復元力特性 ; (b) Bilinear 型と Menegotto-Pinto 型の関係

表 1 減衰モデルの種類

No.	減衰モデル	分類	解析ソフトウェア				
			SNAP ⁹⁾	Midas ¹⁰⁾	ADINA ¹¹⁾	Opensees ¹²⁾	SAP2000 ¹³⁾
1	$[c] = a_0[m]$	比例	○	○	○	○	○
2	$[c] = a_1[k]$	非比例	○	○	○	○	○
3	$[c] = a_1[k^*]$	比例	○	○	○	○	
4	$[c] = a_1^*[k^*]$	比例・保持					
5	$[c] = a_0[m] + a_1[k]$	非比例	○	○	○	○	○
6	$[c] = a_0[m] + a_1[k^*]$	比例	○	○	○	○	
7	$[c] = a_0^*[m] + a_1^*[k^*]$	比例・保持					
8	$[c] = a_0[m][k]^{-1}[k^*] + a_1[k^*]$	非比例					
9	$[c] = [m] \sum_{i=0}^{N-1} a_i ([m]^{-1}[k])^i$	非比例					
10	$[c] = a_{-1}[m][k]^{-1}[m] + a_0[m]$	非比例					
11	$[c] = a_{-1}[m][k]^{-1}[m] + a_0[m] + a_1[k^*]$	非比例					
12	$[c] = [m] (\sum_{i=1}^N (2\bar{\zeta}_{i0}\omega_i/M_i) \{\Phi_i\}^T \{\Phi_i\}) [m]$	非比例	○	○	○	△ ^{**}	○
13	$[c] = [m] (\sum_{i=1}^N (2\bar{\zeta}_{i0}\omega_i^*/M_i^*) \{\Phi_i^*\}^T \{\Phi_i^*\}) [m]$	比例・保持					
14	$[c] = [m] [\Phi] \setminus 2\bar{\zeta}_{i0}\omega_i \setminus [\Phi]^T [m]$	非比例	○	○	○		

※Newmark の β 法では使用不可

ら 8 と 10 では 1 と 3 次モード、モデル 9 と 12 から 14 では全 5 モード (表 1 において $N=5$)、モデル 11 では 1、2 と 3 次モードの減衰比を、この目標値に一致させた。時間積分に中央差分法を用い、時間刻みは 1/500 s とした。

5. 解析結果

図 2 に、Bilinear 型の 3 層目を例に、モデル 5、8 と 13 の復元力・減衰力と層間変形角の関係を、解析時刻 4 から 6 s までで比較する。図 3 に、Menegotto-Pinto 型の 3 層目を例に、モデル 5 の復元力と減衰力を示す。①は 5 s、②と③は降伏と除荷開始、④は 5.5 s の時刻点で、①から④までの履歴を太実線で示す。減衰力は、復元力の 10 分の 1 のオーダーであった。復元力は、モデル 5、8 と 13 のいずれを選択しても、ほとんど変わらなかった。しかし、減衰力は、②から④までの間で、モデルごとに大きく異なった。復元力が、降伏限に達するときの減衰力は、モデル 5 で 125 kN、モデル 8 と 13 で 0 kN で、モデル 5 が減衰力を大きく見積

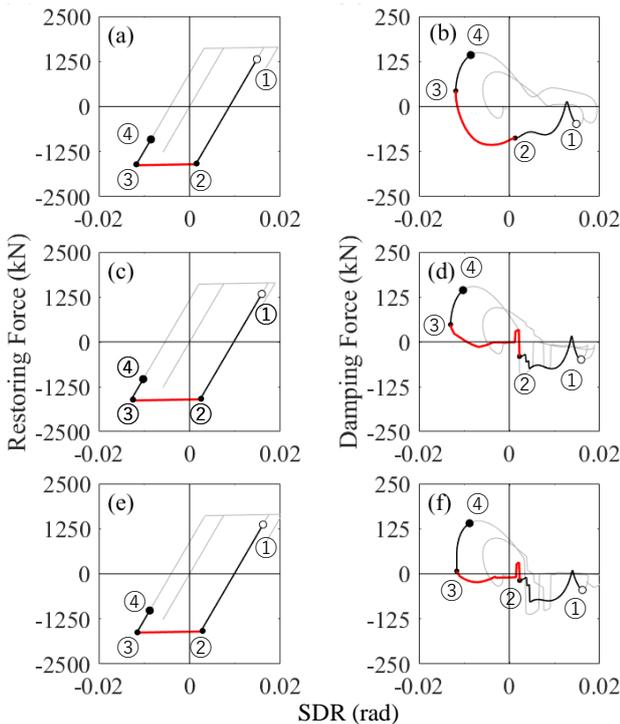


図 2 復元力 (左) と減衰力 (右) の履歴 : (a, b) モデル 5 ; (c, d) モデル 8 ; (e, f) モデル 13

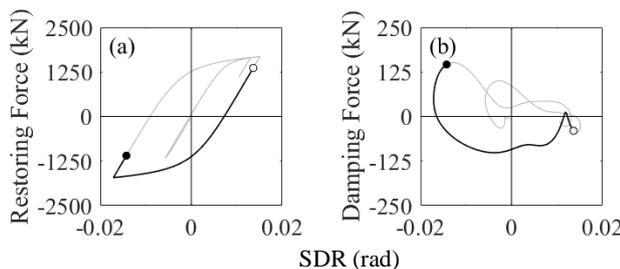


図 3 モデル 5 の (a) 復元力と (b) 減衰力の履歴

もった。モデル 5 の減衰エネルギーは、モデル 13 の倍近かった。

図 4 に、Bilinear 型と Menegotto-Pinto 型のそれぞれについて、1 から 13 の減衰モデルを用いた場合の、各層の最大層間変形角を示す。降伏後に系の剛性が急変する Bilinear 型では、1 層と 5 層の最大層間変形角が、減衰モデルによって倍半分も異なった。2 つ以上のモードから減衰比を設定する番号 5 以上の減衰モデルでは、Menegotto-Pinto 型でも Bilinear 型でも、モデルによる違いは 20% 程度に収まった。

6. 考察

図 5 に、Bilinear 型とモデル 5 (1 次と 3 次で目標減衰比を定めたレイリー減衰) を用いた場合の、1、3、5 次の γ_i^* と $\zeta_{n,eq}$ 、 ζ_{eq} の時刻歴を示す。図 2 と同じ、解析時刻 4 から 6 s までの 2 秒間をとり出し、①から④の時刻点を示した。弾性範囲では、 $\gamma_1^* = 0.85$ 、 $\gamma_3^* = 0.03$ 、 $\gamma_5^* = 0.005$ 、 $\zeta_{1,eq} = 0.05$ 、 $\zeta_{3,eq} = 0.05$ 、 $\zeta_{5,eq} = 0.07$ である。図を見ると、系が降伏すると、 γ_1^* は 0.2 まで減少、 γ_3^* は 0.4 まで増大、 γ_5^* は 0.2 まで増大する瞬間があり、卓越モードが大きく変化した。 $\zeta_{1,eq}$ は 0.5 に、 $\zeta_{3,eq}$ は 0.7 に達したが、 $\zeta_{5,eq}$ は弾性範囲の 0.07 からほとんど変化しなかった。式(5)で定義した減衰比の代表値 ζ_{eq} は、3 層が降伏した時刻②から③までの間などで、最大で 0.5 にも達した。図 5(c) に色分けで示すように、1 次モードが ζ_{eq} のほとんどを占めていた。

図 6 に、Bilinear 型で得た ζ_{eq} の時刻歴を、レイリー減衰系のモデル 6、7 と 8、あるいはモード減

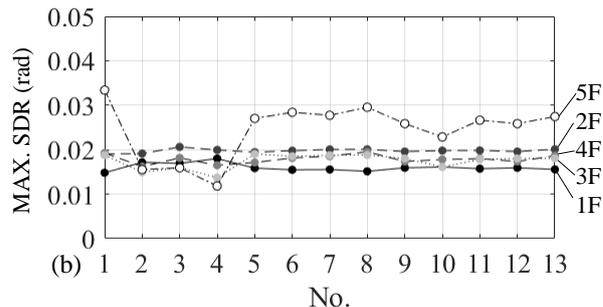
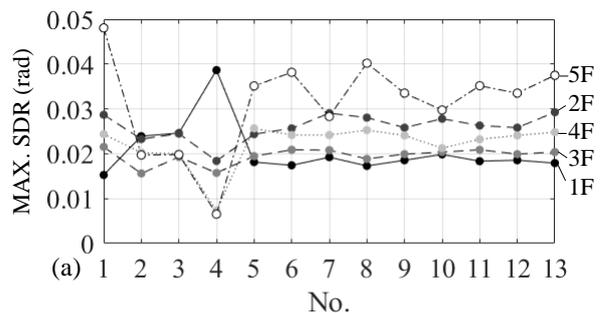


図 4 各層の最大層間変形角 : (a) Bilinear 型 ; (b) Menegotto-Pinto 型

衰系のモデル 12 と 13 に分けて示す。 ζ_{eq} は、系が降伏すると、モデル 6、7、12 で目標値 0.05 を超え、モデル 8 で目標値を下まわったが、モデル 13 で常に目標値に一致した。モデル 6 と 12 は、図 5(c)に示したモデル 5 と同等に大きな値を示し、モデル 7 と 8 は、目標値に近い値をとった。図示しないが、Menegotto-Pinto 型を用いた場合は、Bilinear 型と比較して ζ_{eq} の変動幅が 4 分の 1 程度であった。この例から、Charney⁵⁾や Chopra⁶⁾が指摘するように、系が降伏した状態では、モデル 5 のレイリー減衰が減衰比を大きく見積もること、この欠点が、剛性行列の更新だけでは解消されないことを確認できた。

図 7 に、Menegotto-Pinto 型を用いた場合について、各減衰モデルで、減衰エネルギーの 75%が消

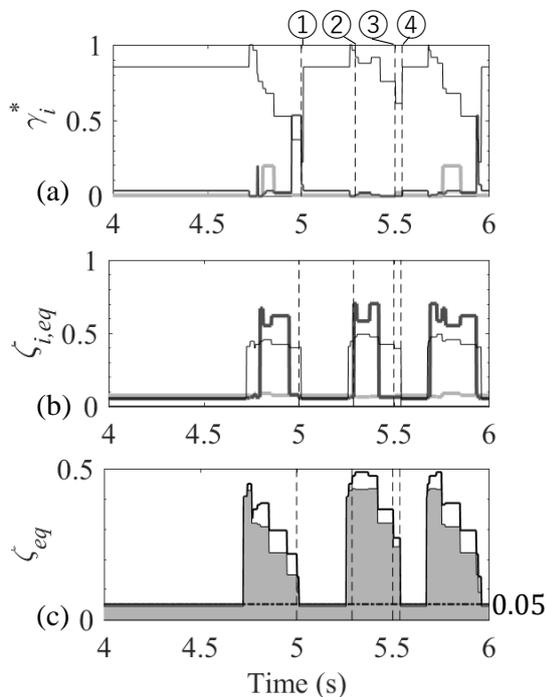


図 5 Bilinear 型とモデル 5 を用いた場合 :

(a) γ_i^* ; (b) $\zeta_{n,eq}$; (c) ζ_{eq} の時刻歴

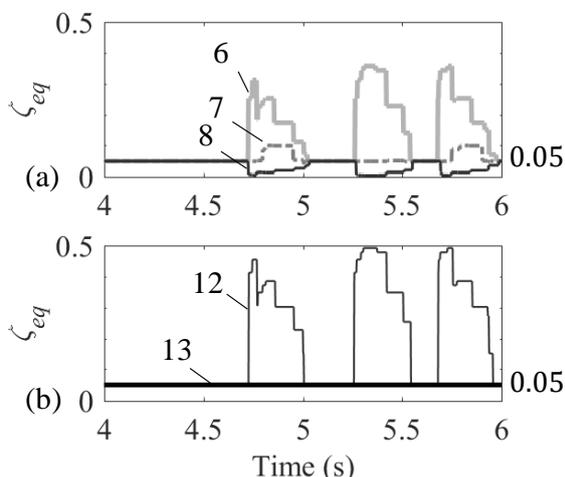


図 6 Bilinear 型を用いた場合の ζ_{eq} の時刻歴

(a)モデル 6、7、8 ; (b) モデル 12 と 13

費されるおよそ 7 秒間で平均した ζ_{eq} を、減衰エネルギーと関連づける。 ζ_{eq} の平均値と減衰エネルギーには、相関係数 0.933 の強い相関関係がみられた。 ζ_{eq} が常に目標値に一致するモデル 13 を仮に正解とすると、大多数のモデルは減衰エネルギーを過大評価したが、モデル 7 は極めて正解に近く、モデル 8 は過小評価した。

7. まとめ

知られている 13 種類の減衰モデルについて、多自由度系の地震応答解析によって、弾塑性応答に対する適性を比較、検討した。主な結論を、以下にまとめる。

- 1) 従来の指摘どおり、レイリー減衰は、系が降伏したときの減衰力を過大評価すること、その傾向が、Menegotto-Pinto 型の履歴モデルより Bilinear 型でより顕著なことを確認した。
- 2) モデル 13 は、 ζ_{eq} を常に目標値に一致させるので、検討したモデルの中で最も信頼できる。モデル 7 と 8 も、 ζ_{eq} が目標値から少し外れるが、適切なモデルであることを確認した。
- 3) 各減衰モデルの特性を、等価減衰比 $\zeta_{n,eq}$ とその代表値 ζ_{eq} で分析し、 ζ_{eq} と減衰エネルギーに強い相関があることを示した。

参考文献

- 1) 日本建築学会: 建築の減衰, 2000
- 2) Chopra AK. Dynamics of Structures. 4nd ed. Prentice Hall: USA; 2012
- 3) Lagomarsino S.: J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn., Vol.48, pp.221-239, 1993
- 4) O'Rourke MO.: J Struct Engrg., ASCE 102(ST11):2401-2403; 1976
- 5) Charney, FA: J. Struct. Engrg., ASCE, 134, pp.581-592, 2008
- 6) Chopra, AK, Mckenna F: Earthq. Engrg. Struct. Dyn., 45, pp.193-211, 2016
- 7) Hall J F: Earthq. Engrg. Struct. Dyn., 47, pp.2756-2776, 2018
- 8) Wilson EL, Penzien J.: Int. J. Numer. Methods Engrg., 4, pp.5-10, 1972
- 9) (株)構造システム: SNAP Ver.7 テクニカルマニュアル, 2015
- 10) midas iGen : 理論マニュアル, 2009
- 11) ADINA R&D, Inc. Theory and Modeling Guide Volume I:ADINA 2018
- 12) S. Mazzoni et al.: OpenSees Command Language Manual. 2006
- 13) Computers & Structures, Inc. (CSI). Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS, SAFE and CSiBridge, 2016
- 14) 柴田明徳: 最新耐震構造解析 第3版, 森北出版, 2014
- 15) 秋山宏: エネルギーの釣合に基づく建築物の耐震設計, 技報堂出版, 1999
- 16) Bernal, D.: J.Struct.Engrg., 120, pp.1240-1254, 1994

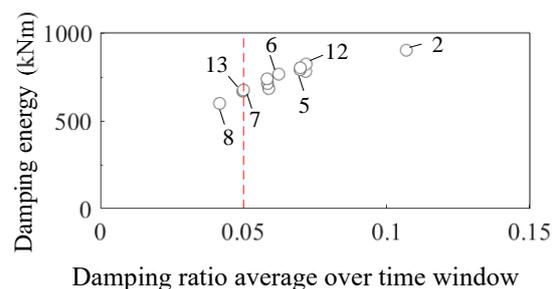


図 7 ζ_{eq} の代表値と減衰モデルの関係